

ҮШІНШІ РЕТТІ АНЫҚТАУЫШТАР

1-ӘДІС. Үшінші ретті анықтауыш деп келесі санды айтады

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (2)$$

Үшінші ретті анықтауышты есептеу тәсілі **үшбұрыштар** (Сарриус) ережесі деп аталады. (2)-ші формуладағы плюс және минус таңбаларымен алынатын мүшелерін есептеу сұлбасы:

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

МЫСАЛ. Үшінші ретті анықтауышты есептеңіз.

Шешуі. Анықтауышты үшбұрыштар ережесін пайдаланып есептейміз:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \\ 1 \cdot 0 \cdot 7 + (-3) \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 0 \cdot 6 - (-3) \cdot 4 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 5 = \\ = 0 - 36 + 60 - 0 + 84 - 10 = 98.$$

2-ӘДІС (диагоналдар әдісі). Үшінші ретті анықтауышты келесі тәсілмен де есептеуге болады: анықтауыштын 1-ші және 2-ші бағандарын (жолдарын) оның оң жағына (төмен жағына) көшіріп, плюс таңбасымен алынған үш диагоналдары мен минус таңбасымен алынған үш диагоналдары (2) формуланы беретінің көреміз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

немесе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

МЫСАЛ. Үшінші ретті анықтауышты диагоналдар әдісімен есептеңіз.

Шешуі. 1) Анықтауыштын 1-ші және 2-ші бағандарын оның оң жағына көшіріп, плюс таңбасымен алынған үш диагональдарын есептейміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{matrix} = 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 9 \cdot 0 \cdot 1$$

және минус таңбасымен алынған үш диагональдарын есептейміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{matrix} = -9 \cdot 6 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 7$$

бұдан аламыз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{matrix} = 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 9 \cdot 0 \cdot 1 - 9 \cdot 6 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 7 =$$

$$= 84 + 60 - 0 - 270 - 8 - 0 = 144 - 278 = -134.$$

2) Анықтауыштын 1-ші және 2-ші жолдарын оның төмен жағына көшіріп, плюс таңбасымен алынған үш диагональдарын есептейміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 4.$$

Енді мен минус таңбасымен алынған үш диагональдарын есептейміз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -9 \cdot 6 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \cdot 0 =$$

бұдан алатынымыз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 4 - 9 \cdot 6 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \cdot 0 =$$

$$= 84 + 0 + 60 - 270 - 8 - 0 = -134.$$

МИНОР

a_{ij} элементінің M_{ij} **миноры** осы анықтауыштың i -ші жатық жолы мен j -ші бағаның сызып тастағанда алынған анықтауышқа тең.

МЫСАЛ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицасы берілген. Табу керек a_{23}, a_{11}, a_{32}

элементтерінің минорларын.

Шешуі. Берілген матрицасының анықтауышын жазып аламыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1) a_{23} элементінің минорын табамыз, ол үшін анықтауыштың 2-ші жолы мен 3-ші бағаның сызып тастағанда екінші ретті анықтауш аламыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5.$$

2) a_{11} элементінің минорын табамыз, ол үшін берілген матрица анықтауышының 1-ші жолы мен 1-ші бағаның сызып тастаймыз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9.$$

3) a_{32} элементінің M_{32} миноры бұл үшінші ретті анықтауыштың 3-ші жолы мен 2-ші бағансыз алынған анықтауыштың сан мәні:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1.$$

АЛГЕБРАЛЫҚ ТОЛЫҚТАУЫШ

Алгебралық толықтауыш $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ формуласы бойынша анықталады.

!
$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{егер } n - \text{тақ сан болса,} \\ 1, & \text{егер } n - \text{жүп сан болса.} \end{cases}$$

Мысалы,

$$(-1)^1 = -1;$$

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$$

$$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1;$$

$$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1)(-1) \cdot (-1) = 1.$$

МЫСАЛ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының A_{23} алгебралық

толықтауышын табайық:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (10 - 18) = 8.$$

3-ӘДІС. Анықтауышты жол немесе баған бойынша жіктеп есептеу

а) Анықтауышты 2-ші жатық жолы бойынша жіктелістің формуласы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

ә) анықтауышты 3-ші тік жол бойынша жіктелістің формуласы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

МЫСАЛ. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ үшінші ретті анықтауш берілін.

а) анықтауышты 2-ші жатық жолы бойынша жіктеп есептеу

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = \mathbf{0} \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{4} \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{(-1)} \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

ә) анықтауышты 3-ші баған бойынша жіктеп есептеу

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{-1} \\ 0 & 4 & \mathbf{-1} \\ 2 & 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \\ = \mathbf{(-1)} \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{(-1)} \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{2} \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

МЫСАЛ. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ анықтауыш берілген. a_{23} элементінің миноры мен

алгебралық толықтауышын табыңыз.

Шешуі. Берілген анықтауыштың екінші жолы мен үшінші бағанын сызып тастасақ a_{23} элементінің минорын аламыз:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2.$$

Сонда a_{23} элементінің алгебралық толықтауышы:

$$A_{23} = (-1)^5 M_{23} = (-1) \cdot 2 = -2.$$

4-ТАПСЫРМА. Үшінші ретті анықтауыш берілген:

а) берілген матрицасының үшінші ретті анықтауышын: үшбұрыштар әдісімен есептеңіз; i -ші жатық жолы бойынша жіктеп, есептеңіз; j -ші тік жолы бойынша жіктеп, есептеңіз. ә) берілген матрицасының a_{ij} элементінің M_{ij} миноры мен A_{ij} алгебралық толықтауышын есептеңіз.

$$4.1. \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 2; j = 3. \quad 4.6. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad i = 1; j = 3.$$

$$4.2. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad i = 3; j = 2. \quad 4.7. \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1; j = 1.$$

$$4.3. \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 9 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 2; j = 1. \quad 4.8. \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad i = 2; j = 1.$$

$$4.4. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1; j = 3. \quad 4.9. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 2; j = 2.$$

$$4.5. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 3; j = 3. \quad 4.10. \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 3; j = 1.$$