

СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ (САТЖ)

n белгісіздері бар m сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі (САТЖ) келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ - жүйе белгісіздері, $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ - жүйе коэффициенттері, $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ - бос мүшелер.

Жүйенің барлық теңдеулерін тепе-теңдікке айналдыратын $x_1, x_2, \dots, x_n$ белгісіздерінің мәндері **жүйенің шешімі** деп аталады.

Екі және үш белгісізді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Екі белгісізді екі сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Ал үш белгісізді үш сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Анықтама. Егер жүйенің шешімі бар болса, ол **үйлесімді жүйе**, ал шешімі болмаса, **үйлесімсіз жүйе** деп аталады.

КРАМЕР ЕРЕЖЕСІ

САТЖ-нің n -ші ретті квадрат матрицасының анықтауышы нөлге тең емес болсын $\Delta \neq 0$, онда жүйенің жалғыз шешімі бар және ол келесі формулалар арқылы табылады:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

мұндағы Δ_i анықтауышы Δ анықтауышынан оның j -ші бағанын жүйенің бос мүшелер бағанымен ауыстыру арқылы алынатын анықтауыш.

МЫСАЛ. Крамер әдісімен $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ -3x + 4y = 3 \end{cases}$ жүйені шешіңіз.

Шешуі. Жүйенің жалғыз шешімі бар болуы үшін жүйе матрицасының анықтауышы $\Delta \neq 0$ нөлге тең емес болуы тиіс. Шынында,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Δ — ның бірінші бағанын (x айнымалының коэффициенттерін) жүйенің бос мүшелер бағанымен, ал екінші бағанын (y айнымалының коэффициенттерін) жүйенің бос мүшелер бағанымен ауыстыру арқылы алынатын Δx және Δy анықтауыштарын есептейміз:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Крамер формуласын қолданамыз:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Жауабы. $x = -\frac{1}{5}; \quad y = \frac{3}{5}.$

МЫСАЛ. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ жүйені Крамер ережесін қолданып шешіңіз.

Шешуі. Берілген матрицаның анықтауышы нөлге тең емес екенін тексереміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8 \neq 0.$$

Δ —ның бірінші бағанын жүйенің бос мүшелер бағанымен ауыстыру арқылы алынатын Δx анықтауышын есептейміз:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16.$$

Δ –ның екінші бағаның жүйенің бос мүшелер бағанымен ауыстыру арқылы алынатын Δy анықтауышын есептейміз:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Δ –ның үшінші бағанын жүйенің бос мүшелер бағанымен ауыстыру арқылы алынатын Δz анықтауышын есептейміз:

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

Крамер формулаларын қолданамыз:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{-8} = 0; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1.$$

Жауабы. (2; 0; -1).

КЕРІ МАТРИЦА

Егер $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ теңдіктері орындалса, онда A^{-1} матрицасы A матрицасына **кері матрица** деп аталады да келесі формуламен есептеледі:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

мұндағы Δ - берілген матрицасының анықтауышы, A_{ij} - алгебралық толықтауыштар, E – бірлік матрица.

Сонымен, кері матрицаны алу үшін A матрицасының әрбір элементін оның алгебралық толықтауышымен ауыстырып, алынған матрицаны транспонирлеу керек.

Теорема (кері матрица туралы). Анықтауышы нөлге тең емес (нұқсансыз) матрицалардың, тек қана солардың кері матрицалары бар.

МЫСАЛ. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицаның кері матрицасын табыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша табу керек:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Берілген матрица нұқсансыз болуын, яғни анықтауышы нөлден өзге екенін тексереміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Алгебралық толықтауыштарды табамыз:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +(-5 + 3) = -2.$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 3) = 2.$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +(-1 + 5) = 4.$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-4 + 1) = 3.$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(2 - 1) = 1.$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 4) = -2.$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = +(-12 + 5) = -7.$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5.$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = +(-10 + 4) = -6.$$

Сонымен, кері матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

МАТРИЦАЛЫҚ ӘДІС

Теорема. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйенің матрицасы нұқсансыз болса, онда оның жалғыз шешімі бар және ол келесі формуламен есептеледі:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

САТЖ-ні бұл формула арқылы шешу **матрицалық әдіс** деп аталады.

Егер A квадрат матрица болса, онда жүйенің матрицалық түрінен кері матрицаны пайдаланып, оның шешімін табуға болады.

МЫСАЛ. $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ -3x + 4y = 3 \end{cases}$ сызықтық алгебралық теңдеулер жүйені матрицалық әдісімен шешіңіз.

Шешуі. Берілген жүйеден A - жүйе матрицасын, B – бос мүшелер баған матрицасын және X белгісіздер баған матрицасын анықтаймыз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Матрица анықтаушы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ нолден өзге болғандықтан A матрицасы үшін A^{-1} кері матрицасы бар, оны табамыз. Ол үшін алгебралық толықтауыштарды анықтаймыз:

$$A_{11} = 4; \quad A_{12} = (-1) \cdot (-3) = 3; \quad A_{21} = (-1) \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = 1.$$

Осыдан кері матрицасын жазамыз:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицалар әдісінің формуласын қолданамыз:

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Жауабы. $x = -\frac{1}{5}; \quad y = \frac{3}{5}.$

МЫСАЛ. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ сызықтық алгебралық теңдеулер жүйені

матрицалар әдісімен шешіңіз.

Шешуі. Келесі формуланы қолданамыз:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

мұндағы $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ алгебралық толықтауыштар.

Берілген жүйеден A - жүйе матрицасын, B - бос мүшелер баған матрицасын және белгісіздер баған матрицасын жазамыз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Берілген сызықтық алгебралық теңдеулер жүйенің жалғыз шешімі бар болуы үшін оның матрицасы нұқсансыз болуы тиіс:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8 \neq 0.$$

Алгебралық толықтауыштарды табамыз:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = + \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2.$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 3) = 2.$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot M_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4.$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-4 + 1) = 3.$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot M_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 4) = -2.$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot M_{31} = + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7.$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot M_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5.$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot M_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6.$$

Берілген жүйенің шешімі:

$$X = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-7) \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + (-6) \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -6 - 3 - 7 \\ 6 - 1 - 5 \\ 12 + 2 - 6 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Жауабы. $(2; 0; -1)$.

5-ТАПСЫРМА. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйені Крамер ережесімен және кері матрицалар әдісімен шешіңіз.

$$5.1. \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad 5.2. \begin{cases} 4x + y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad 5.3. \begin{cases} 5x + y = 2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$5.4. \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad 5.5. \begin{cases} 8x + y = -3 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad 5.6. \begin{cases} 6x + y = 2 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$5.7. \begin{cases} x + y = 13 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad 5.8. \begin{cases} 4x + y = -3 \\ 6x + 2y = 11 \end{cases} \quad 5.9. \begin{cases} 9x + y = 2 \\ -x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$5.10. \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \quad 5.11. \begin{cases} 4x + y = -3 \\ x + 7y = 1 \end{cases} \quad 5.12. \begin{cases} 7x + y = 2 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

6-ТАПСЫРМА. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйені шешіңіз

а) Крамер ережесімен; ә) кері матрицалар әдісімен.

$$\begin{array}{lll} \text{6.1.} \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases} & \text{6.2.} \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases} & \text{6.3.} \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{6.4.} \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} & \text{6.5.} \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + z = 2 \end{cases} & \text{6.6.} \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \end{array}$$