

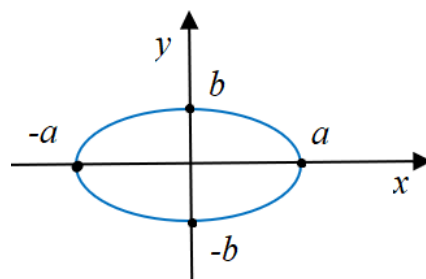
ЕКІНШІ РЕТТІ ҚИСЫҚТАР

Эллипс. Эллипстың канондық теңдеуі, геометриялық қасиеттері

Центрі $O(0; 0)$ бас нүктеде жататын эллипстің канондық теңдеуі (3 сурет):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

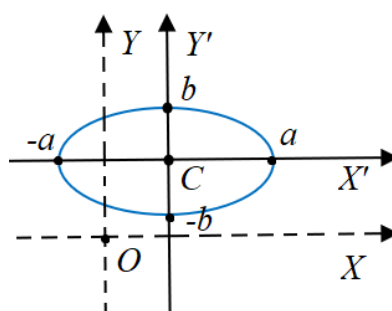
мұндағы a мен b ($a \geq b > 0$) эллипстің сәйкес үлкен және кіші жарты остері деп аталады.



3 сурет.

Центрі $C(x_0; y_0)$ нүктеде жататын эллипстің теңдеуі (4 сурет):

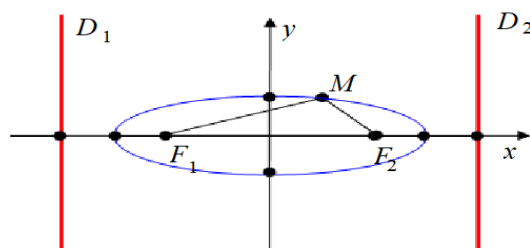
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



4 сурет.

F_1, F_2 фокустарына дейінгі қашықтықтарының қосындысы тұрақты, $2a$ шамасына тең болатын нүктелердің геометриялық орны **эллипс** деп аталады.

Эллипс эксцентриситеті үшін $e < 1$ теңсіздігі орындалады.



5 сурет.

Егер $a > b$ болса, онда $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, фокустары $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, эксцентриситеті $e = \frac{c}{a}$ тең. Егер $b > a$ болса, онда $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ және фокустары $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, эксцентриситеті $e = \frac{c}{b}$ тең. $D = |x| = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ теңдеулерімен анықталатын (фокалдік осіне перпендикуляр) түзулер эллипстің **директрисалары** деп аталады.

МЫСАЛ. Центрі бас нүктеде жататын эллипстің жарты осьтері $a = 2$ және $b = 3$ тең. Эллипстің канондық теңдеуін жазып, фокустарының координаталарын және эксцентриситетін табыңыз. Сызбасын салыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $a = 2$ және $b = 3$ тең, осыдан эллипстің канондық теңдеуінің жазылуы:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Берілгені бойынша $b > a$ болғандықтан эллипс фокустары Oy осінің бойында орналасқан, онда $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

Эллипс сызбасы 6 суретте келтірілген, мұндағы эллипс төбелері:

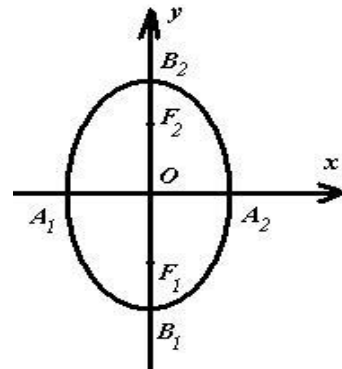
$$A_1(-2; 0); A_2(2; 0); B_1(-3; 0); B_2(3; 0);$$

фокустарының координаталары:

$$F_1(0, -\sqrt{5}), F_2(0, \sqrt{5});$$

эллипс эксцентриситеті:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1.$$

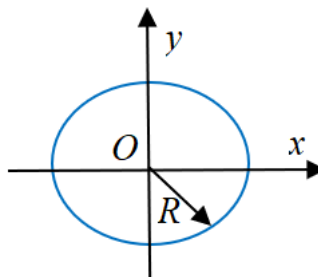


6 сурет.

Шеңбер және оның геометриялық қасиеттері

Егер $a = b$ болса, онда эллипстің дербес жағдайы: центрі $O(0; 0)$ бас нүктеде жататын радиусы R тең шеңбер теңдеуін аламыз (7 сурет):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



7 сурет.

Центрі $C(x_0; y_0)$ нүктеде жататын радиусы R тең шеңбер теңдеуі (10 сурет):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Шеңбер фокустары бірігіп бір бас $O(0; 0)$ нүктеде жатады. Шеңбер эксцентриситеті $e = 1$.

МЫСАЛ. Радиусы 6 тең, центрі $C(3, -7)$ нүктеде орналасатын шеңбердің канондық теңдеуін жазыңыз.

Шешуі. Радиусы $R = 6$ тең, центрі $x_0 = 3; y_0 = -7$ нүктесі болатын шеңбердің теңдеуі:

$$(x - 3)^2 + (y - (-7))^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 36.$$

Гипербола. Гиперболаның канондық теңдеуі, геометриялық қасиеттері

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ деп алып x осінің бойынан

гипербола фокустері деп аталатын

$F_1(-c, 0)$ және $F_2(c, 0)$ нүктелерін

белгілейік (8 сурет).

Анықтама. F_1 және F_2 фокустарға дейінгі қашықтықтарының айырымы тұрақты $2a$

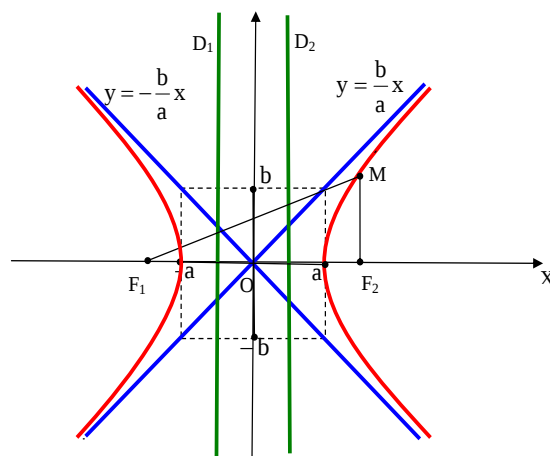
тең нүктелердің геометриялық орны

гипербола деп аталады.

Гиперболаның **эксцентриситеті** $e = \frac{c}{a} > 1$.

Гиперболаның екі **асимптоталары** бар,

олардың теңдеулері: $y = \pm \frac{b}{a}x$.



8 сурет.

Центрі $O(0; 0)$ бас нүктеде жататын

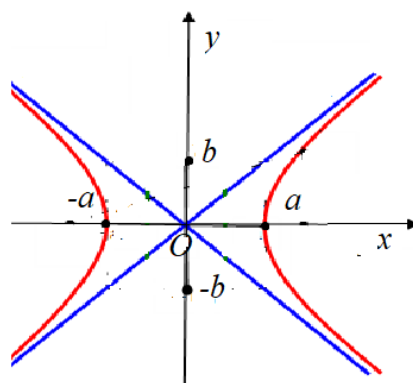
гиперболаның канондық теңдеуі (9 сурет):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0,$$

мұндағы a - гиперболаның нақты OX осінде,

b - гиперболаның жорамал OY осінде

орналасқан жағдайы.



9 сурет.

Центрі $C(x_0; y_0)$ нүктеде орналасатын гиперболаның канондық теңдеуі:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

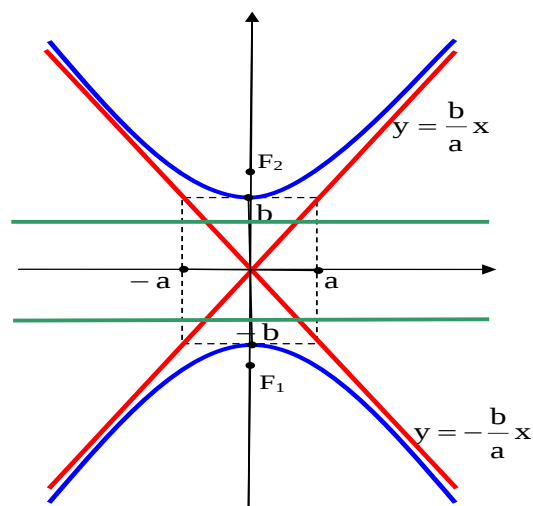
мұндағы a - гиперболаның нақты OX осінде, b - гиперболаның жорамал OY осінде орналасқан жағдайы.

Канондық теңдеуімен берілген
гиперболаға **түйіндес гиперболаның**
теңдеуі (10 сурет):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ немесе } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

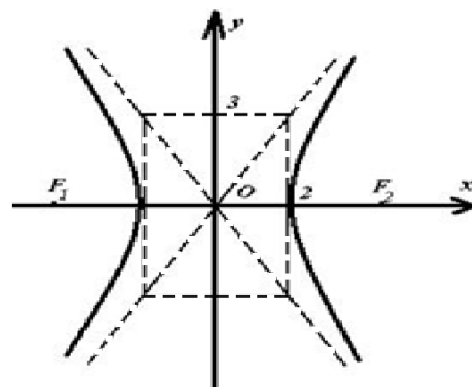
мұндағы a - гиперболаның жорамал OX
осінде, b - гиперболаның нақты OY осінде
орналасқан жағдайы.

Түйіндес гиперболаның $F_1(0, -c)$ және
 $F_2(0, c)$ фокустері ордината осінің
бойында жатады, мұндағы $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



10 сурет.

Гиперболаның сызбасын сызу тәсілі:
қабырғалары $x = \pm a$, $y = \pm b$ тең тікбұрыш
сызамыз. Тікбұрыштың диагональдары -
гиперболаның асимптоталары, ал
тікбұрыштың қабырғалары мен
гиперболаның нақты осімен қиылысу
нүктелері - гиперболаның төбелері болады
(11 сурет).



11 сурет.

МЫСАЛ. Нақты жартылай осі $a = 2$, жорамал жартылай осі $b = 3$ тең
гиперболаның канондық теңдеуін жазып, фокустарының координаталарын,
эксцентриситетін және асимптоталар теңдеулерін жазыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $a = 2$, $b = 3$, онда гиперболаның канондық
теңдеуі:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Гиперболаның жартылай фокустық қашықтығы $c = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$,
эксцентриситеті $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, ($e > 1$), фокустары $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$,
асимптоталар теңдеулері $y = \pm \frac{3}{2}x$.

МЫСАЛ. Жорамал жарты осі $a = 2$, нақты осі $b = 5$ болатын гиперболаның канондық теңдеуін құрып, эксцентриситетін және фокустарын тауып, асимптоталарының теңдеулерін жазыңыз.

Шешуі. Жорамал жарты осі a , нақты жартыосі b болатын түйіндес гиперболаның канондық теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Есептің шарты бойынша $a = 2$, $b = 5$, сондықтан түйіндес гиперболаның канондық теңдеуі

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = -1.$$

Түйіндес гиперболаның $F_1(0, -c)$ және $F_2(0, c)$ фокустері ордината осінің бойында жатады, мұндағы $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$, яғни гиперболаның фокустары $F_1(0, -\sqrt{29})$, $F_2(0, \sqrt{29})$.

Түйіндес гиперболаның төбелері $(0, -5)$ мен $(0, 5)$ нүктелерінде орналасады. Гиперболаның эксцентриситеті тең болады: $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{29}}{5}$ және асимптоталарының теңдеулері $y = \pm \frac{5}{2}x$.

Парабола. Параболаның канондық теңдеуі, геометриялық қасиеттері

Ox осі параболаның симметрия осі болатын, төбесі $O(0; 0)$ бас нүктеде орналасқан параболаның канондық теңдеуі $y^2 = 2px$.

Oy осі параболаның симметрия осі болатын, төбесі $O(0; 0)$ бас нүктеде орналасқан параболаның канондық теңдеуі $x^2 = 2py$.

Теңдеулердегі p саны парабола параметрі деп аталады. Егер $p > 0$ болса, онда параболалардың тармақтары сәйкес осінің оң жағында орналасады, ал $p < 0$ болса, онда сәйкес осінің сол жағында орналасады.

x осінде парабола **фокусі** деп аталатын

$F = \left(\frac{p}{2}; 0\right)$ нүктесін белгілеп, парабола

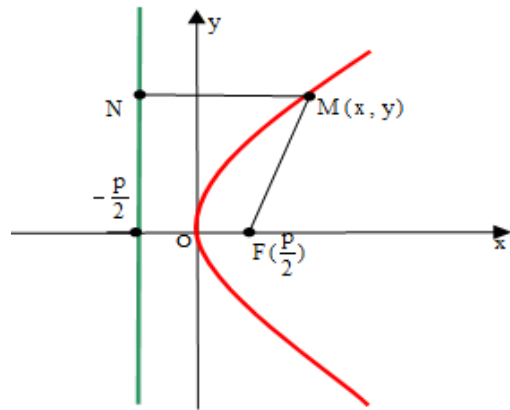
директрисасы деп аталатын $x = -\frac{p}{2}$

түзуін жүргіземіз (12 сурет).

Анықтама. Фокус пен директрисадан бірдей қашықтықта орналасқан $M(x, y)$

нүктелердің геометриялық орны

парабола деп аталады.



12 сурет.

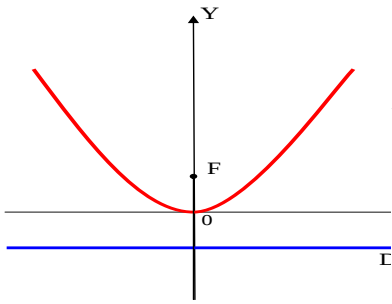
ЕСКЕРТУ. Айталық $p > 0$ болсын, онда

1) $x^2 = 2py$ теңдеуі фокусы $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ және директрисасы $D: y = -\frac{p}{2}$ тең параболаны анықтайды. Сызбада парабола тармағы жоғары қарайды (13 сурет).

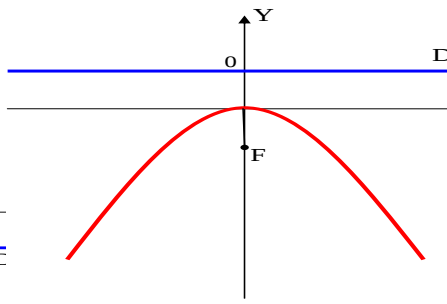
Егер директрисасы $D: y = \frac{p}{2}$, фокусы $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ болса, онда парабола келесі $x^2 = -2py$ теңдеуімен анықталады. Сызбада парабола тармағы төмен қарайды (14 сурет).

2) Егер директрисасы $D: x = -\frac{p}{2}$ тең, ал фокусы $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ тең болса, онда парабола теңдеуі $y^2 = 2px$ теңдеуімен анықталады. Сызбада парабола тармағы оң жаққа қарайды (12 сурет).

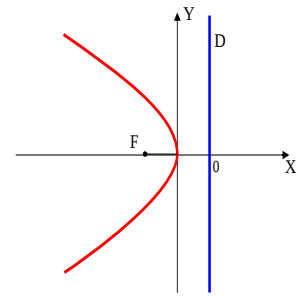
$y^2 = -2px$ теңдеуі фокусы $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ және директрисасы $D: x = \frac{p}{2}$ тең параболаны анықтайды. Сызбада парабола тармағы сол жаққа қарайды (15 сурет).



13 сурет.



14 сурет.



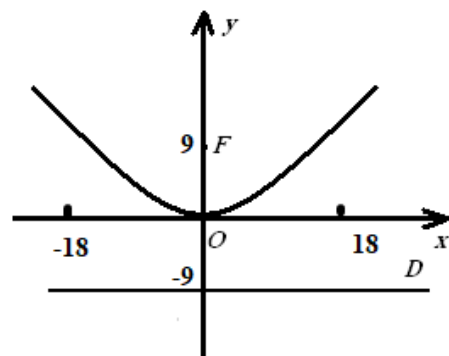
15 сурет.

МЫСАЛ. Симметрия өсі Oy , төбесі координаталар басында жататын, директрисасы $D: y = -9$ болатын параболаның теңдеуін құрып, фокусын табыңыз. Сызбасын сызыңыз.

Шешуі. Төбесі бас нүктеде жататын және симметрия өсі Oy болатын параболаның канондық теңдеуі $x^2 = 2py$, директрисасы $y = -\frac{p}{2}$.

Біздің жағдайда параболаның директрисасының теңдеуі $y = -9$ болғандықтан, $-\frac{p}{2} = -9$, $p = 18$ болады және параболаның теңдеуі келесі түрінде жазылады: $x^2 = 2 \cdot 18y \Rightarrow y = \frac{1}{36}x^2$.

Бұл тармақтары жоғары қарайтын, симметрия өсі Oy болатын, төбесі координаталар басында жататын парабола. Параболаның фокусы Oy осінде жататын $F\left(0; \frac{p}{2}\right) = F(0; 9)$ нүктесі (16 сурет).



16 сурет.

2-ТАПСЫРМА. A нүктесінің координаталары, R шеңбер радиусы, a және b жартылай осьтері, D директрисасы берілген. Табыңыз: а) центрі A нүктесінде орналасқан, радиусы R тең шеңбердің канондық теңдеуін жазыңыз; ә) a және b жартылай осьтері бар эллипстің канондық теңдеуін жазып, фокустары мен эксцентриситетін табыңыз; б) a нақты жартылай осі және b жорамал жартылай осі бар гиперболаның теңдеуін жазып, фокустары, эксцентриситетін және асимптоталар теңдеуін табыңыз; в) төбесі бас нүктесінде орналасқан, директрисасы берілген параболаның канондық теңдеуін жазып, фокустары мен эксцентриситетін табыңыз; г) сызбаларын салыңыз.

2.1 $A(2; -4), R = 4, a = 1, b = 3, D: x = -5.$

2.2 $A(-8; 2), R = 1, a = 6, b = 5, D: x = -5.$

2.3 $A(1; -4), R = 5, a = 8, b = 3, D: y = -6.$

2.4 $A(5; -4), R = 2, a = 6, b = 4, D: y = -2.$

2.5 $A(2; -5), R = 7, a = 3, b = 2, D: x = 4.$

2.6 $A(1; 8), R = 5, a = 3, b = 2, D: x = -3.$

2.7 $A(5; 5), R = 2, a = 1, b = 3, D: y = -7.$

2.8 $A(1; -3), R = 5, a = 8, b = 2, D: y = 6.$

2.9 $A(6; 3), R = 8, a = 2, b = 3, D: x = -5.$

2.10 $A(10; 1), R = 8, a = 1, b = 6, D: y = -4.$

Жазықтықтағы екінші дәрежелі айқындалмаған теңдеуімен анықталған қисықты канондық түріне келтіру

Кейбір жағдайларда жазықтықтағы тік бұрышты координаталар жүйесінде екінші дәрежелі айқындалмаған теңдеумен анықталған қисықты канондық түріне келтіру керек болады.

МЫСАЛ. $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 20 = 0$ екінші ретті қисықтың теңдеуін канондық түрге келтіріп, сызбасын салыңыз.

Шешуі. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуін канондық түрге келтіру үшін, оны түрлендіріп центрі $C(x_0; y_0)$ нүктеде жататын радиусы R тең шеңбер теңдеуіне келтіреміз

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуін түрлендіреміз:

$$x^2 + y^2 + 8x - 12y + 20 = 0 \Rightarrow (x^2 + 8x) + (y^2 - 12y) + 20 = 0,$$

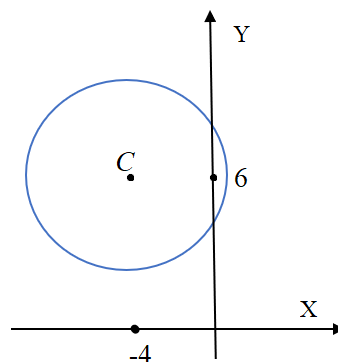
$$(x^2 + 8x + 16) - 16 + (y^2 - 12y + 36) - 36 + 20 = 0.$$

Осыдан центрі $C(-4; 6)$ нүктесі,

радиусы $R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ болатын

шеңбердің теңдеуін аламыз (17 сурет):

$$(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 32.$$



17 сурет.

МЫСАЛ. $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 19 = 0$ екінші ретті қисықтың теңдеуін канондық түрге келтіріп, сызбасын салыңыз.

Шешуі. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуін канондық түрге келтіру үшін, оны түрлендіреміз

$$(9x^2 - 18x) + (-16y^2 - 64y) - 19 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) - 19 = 0.$$

Квадрат үшмүшелікке толықтырамыз:

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 16(y^2 + 4y + 4 - 4) - 19 = 0,$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) - 19 - 9 \cdot 1 - 16 \cdot (-4) = 0,$$

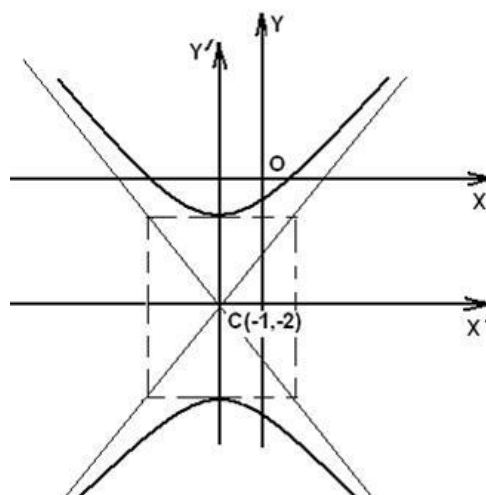
$$9(x + 1)^2 - 16(y + 2)^2 = -36,$$

Бұдан аламыз

$$\frac{(x+1)^2}{-36/9} + \frac{(y+2)^2}{36/16} = 1,$$

$$-\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9/4} = 1.$$

Алынған теңдеу – гипербола теңдеуі (18 сурет): центрі $C(-1; 2)$ нүктесінде орналасқан, нақты осі $b = 3/2$, жорамал осі $a = 1$ тең.



18 сурет.

3-ТАПСЫРМА. Екінші ретті қисықтың жалпы теңдеуін канондық түрге келтіріп, сызбасын салыңыз.

3.1. $-16 - 4x - 64y - 64 = 0.$

3.2. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 64y - 127 = 0$

3.3. $-3y^2 + 2x - 12y + 30 = 0.$

3.4. $9x^2 - y^2 - 18x - 6y - 10 = 0.$

3.5. $4y^2 + 8x + 16y + 30 = 0.$

3.6. $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 9 = 0.$

3.7. $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 20 = 0.$

3.8. $-y^2 + 12x - 2y - 25 = 0.$

3.9. $x^2 - y^2 - 4y - 4 = 0.$

3.10. $-y^2 + 8x - 2y - 9 = 0.$

3.11. $5x^2 + 9y^2 + 30x + 18y + 9 = 0.$

3.12. $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0.$