

ТУЫНДЫЛАР КЕСТЕСІ

1. $(C)' = 0, C - const.$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}, (n \in R, x > 0).$

Дербес жағдайлар:

$$(x)' = 1, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. $(a^x)' = a^x \ln a, (0 < a \neq 1),$

Дербес жағдайы: $(e^x)' = e^x.$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (x > 0, 0 < a \neq 1).$

Дербес жағдайы

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

5. $(\sin x)' = \cos x.$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z).$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, (x \neq \pi k, k \in Z).$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1).$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1).$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

15. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

16. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

МЫСАЛ. $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}$ функцияның туындысын табыңыз.

Шешуі. Кестелік туынды формулаларына келтіру үшін берілген функцияны түрлендіреміз:

$$y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} = x^{1/2} + 5x^{-1/3} - x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3}.$$

Берілген функцияның туындысын кестедегі 2-ші формуланы қолданып табамыз:

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{1/2} + 5x^{-1/3} - x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} \right)' = (x^{1/2})' + 5(x^{-1/3})' - (x^{-1})' + \frac{1}{3}(x^{-3})' = \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) x^{2/3} - (-1)x^{-2} + \frac{1}{3}(-3)x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}. \end{aligned}$$

Күрделі функцияның туындысы. Егер $x = \varphi(t)$ функциясы t_0 нүктесінде, ал $y = f(x)$ функциясы $x_0 = \varphi(t_0)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $y = f[\varphi(t)]$ күрделі функция t_0 нүктесінде дифференциалданады және

$$y'(x_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) = f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0).$$

Тригонометриялық
функцияларды
дифференциалдау

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$(tg u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(ctg u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

МЫСАЛ. $y = \sin 7x$, мұнда $u = 7x$. Онда

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 7x)' = \cos 7x \cdot (7x)' = \\ &= \cos 7x \cdot 7 = 7 \cos 7x. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $y = \cos 5x$, мұнда $u = 5x$. Онда

$$\begin{aligned} y' &= (\cos 5x)' = -\sin 5x \cdot (5x)' = \\ &= -\sin 5x \cdot 5 = -5 \sin 5x. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $y = tg 5x$, мұнда $u = 5x$. Онда

$$y' = (tg 5x)' = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot (5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

Кері тригонометриялық
функцияларды
дифференциалдау

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$(\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$(\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

МЫСАЛ. $y = \arcsin 2x$, мұнда $u = 2x$.

$$\begin{aligned} \text{Онда } y' &= (\arcsin 2x)' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $y = \arccos \sqrt{x}$, мұнда $u = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} y' &= (\arccos \sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $y = \arctg e^x$, мұнда $u = e^x$.

$$(arctg e^x)' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

Көрсеткіштік функцияларды
дифференциалдау

$$(e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

МЫСАЛ. $y = e^{3x-2}$, мұнда $u = 3x - 2$. Онда

$$y' = (e^{3x-2})' = e^{3x-2} \cdot (3x-2)' = 3e^{3x-2}.$$

МЫСАЛ. $y = 9^{\cos x}$, мұнда $u = \cos x$, $a = 9$.

$$\text{Онда } y' = (9^{\cos x})' = 9^{\cos x} \ln 9 \cdot (\cos x)' =$$

$$= -9^{\cos x} \ln 9 \cdot \sin x$$

Логарифмдік функцияларды
дифференциалдау

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

МЫСАЛ. $y = \ln 5x$, мұнда $u = 5x$. Онда

$$y' = (\ln 5x)' = \frac{1}{5x} \cdot (5x)' = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}.$$

МЫСАЛ. $y = \ln(x^7 - 3x)$, $u = x^7 - 3x$. Онда

$$\begin{aligned} y' &= (\ln(x^7 - 3x))' = \frac{1}{x^7 - 3x} \cdot (x^7 - 3x)' = \\ &= \frac{1}{x^7 - 3x} \cdot (7x^6 - 3) = \frac{7x^6 - 3}{x^7 - 3x}. \end{aligned}$$

Күрделі дәрежелік
функцияларды
дифференциалдау

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'.$$

МЫСАЛ. $y = (e^{\sin x} + 4x - 2)^3$, мұнда $n = 3$,

$u = e^{\sin x} + 4x - 2$. Онда $y' = ((e^{\sin x} + 4x - 2)^3)' =$

$$= 3(e^{\sin x} + 4x - 2)^2 (e^{\sin x} + 4x - 2)' =$$

$$= \left| (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cos x \right| =$$

$$= 3(e^{\sin x} + 4x - 2)^2 (e^{\sin x} \cos x + 4).$$

МЫСАЛ. $y = \sqrt[3]{2 + x^4}$, мұнда $u = 2 + x^4$.

$$y' = \left((2 + x^4)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} (2 + x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2 + x^4)' =$$

$$= \frac{1}{3} (2 + x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(2 + x^4)^2}}.$$

МЫСАЛ. $y = \ln^3 x$, мұнда $u = \ln x$.

$$y' = 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' = \frac{3\ln^2 x}{x}.$$

Егер функция параметрлік
түрде берілсе:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

онда

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

МЫСАЛ. $x = 2\cos t, y = 5\sin t$. Онда

$$y'_x = \frac{(5\sin t)'}{(2\cos t)'} = \frac{5\cos t}{-2\sin t} = -\frac{5}{2} \operatorname{ctgt}.$$

МЫСАЛ. $x = 7t^3 + 7t - 9, y = t^3 + 5t$.

Онда

$$y'_x = \frac{(t^3 + t)'}{(7t^3 + 7t - 9)'} =$$

$$= \frac{3t^2 + 1}{21t^2 + 7} = \frac{3t^2 + 1}{7(3t^2 + 1)} = \frac{1}{7}.$$