

ЛОПИТАЛЬ ЕРЕЖЕСІ

I. $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық.

1-теорема. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары x_0 нүктесінің аймағында анықталып, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ және шекті туындылары $f'(x_0)$, $g'(x_0) \neq 0$ бар болса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ шек бар және

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

II. $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандық.

2-теорема. Егер $f(x)$ және $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ функциялары (a, b) интервалында дифференциалданса, кез келген $x \in (a, b)$ үшін

$$, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

шекті немесе шексіз $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ шек бар болса, онда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ шек те бар және

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

III. $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу мақсатында алдымен алгебралық түрлендіру арқылы $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ түріне келтіріп, Лопиталь ережесін қолданады.

МЫСАЛ. Лопиталь ережесін пайдаланып, шекті есептейміз:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 6x + 5)'}{(3x^2 - 14x - 5)'} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 6}{6x - 14} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

МЫСАЛ. Лопиталь ережесін пайдаланып, шекті есептейміз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{4x^2 - 8x^4 + 1} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - x + 3)'}{(4x^2 - 8x^4 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{8x - 32x^3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x - 1)'}{(8x - 32x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{8 - 96x^2} = 0. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. Лопиталь ережесін пайдаланып, шекті есептейміз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x) &= |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cdot \cos x)'}{(\sin x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos x - x \cdot (-\sin x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x \sin x}{\cos x} = \frac{1 + 0}{1} = 1. \end{aligned}$$

3-ТАПСЫРМА. Лопиталь ережесін пайдаланып, шекті есептеңіз.

3.1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$

3.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

3.3 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x)$

3.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

3.5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$

3.6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3xe^x + 3x^2}{\arctg x - \sin x - x^3/6}$

3.7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2\ln(\sin x)}$

3.8 $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \ctg x)$

3.9 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \ctg^2 x \right)$

3.10 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$