

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ ($a < b$) кесіндісінде анықталған болсын. $[a, b]$ кесіндісін қалауымызша n бөлікке бөлеміз:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ бөліктен қалауымызша $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ нүктелерін таңдап аламыз, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ белгілейміз де қосынды түзейміз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

(1)-ші формуланы $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндідегі **интегралдық қосындысы** деп атаймыз. $\lambda = \max \Delta x_i$ белгілейміз.

Егер $\lambda \rightarrow 0$ ұмтылғанда (1)-ші интегралдық қосындының шекті шегі бар болып, ол шек $[a, b]$ кесіндісін бөліктеуден және әрбір $[x_{i-1}, x_i]$, ($i = \overline{1, n}$) кесіндісінен алынатын ξ_i нүктесінен тәуелсіз болса, онда бұл шекті $[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының **анықталған интегралы** (Риман интегралы) деп атайды да келесідей белгілейді:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$

мұндағы a және b сәйкес интегралдың төменгі және жоғарғы шегі; x - интегралдау айнымалысы; $f(x)$ - интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ - интеграл астындағы өрнек.

Анықталған интегралдың қасиеттері:

1) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz;$

2) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k - \text{const};$

3) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$

4) Егер $[a, b]$ кесіндісі $[a, c]$ және $[c, b]$ кесінділеріне бөлінсе, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

5) Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x) \geq 0$ болса, онда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Ньютон-Лейбниц формуласы:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

МЫСАЛ. $\int_0^2 x^2 dx$ анықталған интегралды есептейік:

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

МЫСАЛ. $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{(x+1)^2}$ анықталған интегралды есептеңіз.

Шешуі. Анықталған интегралды есептеуде алмастыру әдісін қолданамыз, сонда интегралдау шектері де өзгереді:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^3 dx}{(x+1)^2} &= \left| \begin{array}{l} x+1=t; \\ x=t-1, dx=dt \\ \text{интегралдын шектері өзгереді:} \\ t=x+1 \text{ болады да} \\ x=1 \text{ болғанда } t=2, \\ x=2 \text{ болғанда } t=3 \end{array} \right| = \\ &= \int_2^3 \frac{(t-1)^3 dt}{t^2} = \int_2^3 \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t^2} dt = \\ &= \int_2^3 \left(t - 3 + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 3t + 3\ln|t| + \frac{1}{t} \right]_2^3 = \\ &= \left(\frac{3^2}{2} - 9 + 3\ln|3| + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{2^2}{2} - 6 + 3\ln|2| + \frac{1}{2} \right) = \ln \left| \frac{27}{8} \right| - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. Бөліктеп интегралдау тәсілін қолданып, $\int_0^1 x \cos 2x dx$ анықталған интегралды есептеңіз.

Шешуі.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} x=u, \quad dx=du, \\ \cos 2x dx = dv, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin 2x dx = \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{4} (\cos 2 - \cos 0) = \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{4} (\cos 2 - 1). \end{aligned}$$

9-ТАПСЫРМА. Анықталған интегралды есептеңіз.

9.1. $\int_0^{-3} (4x - x^3) dx$

10.7. $\int_0^2 (1 - e^x) dx$

9.2. $\int_1^9 (\sqrt{x} - 5) dx$

9.8. $\int_0^1 (2 + x)^2 dx$

9.3. $\int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx$

9.9. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}$

9.4. $\int_3^{10} \sqrt[3]{x - 2} dx$

9.10. $\int_0^1 \frac{x + 2}{x + 1} dx$

9.5. $\int_{-1}^{-0.5} \frac{x^2 - 1}{x^4} dx$

9.11. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

9.6. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

9.12. $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin^2 t dt$

10-ТАПСЫРМА. Айнымалыны ауыстыру тәсілін қолданып, анықталған интегралды есептеңіз.

$$10.1. \int_0^2 x^3 \cdot e^{x^2} dx$$

$$10.7. \int_0^{0.5} x^3 \cdot e^{-x^4} dx$$

$$10.2. \int_1^e \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x + 1)}$$

$$10.8. \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$10.3. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$$

$$10.9. \int_0^1 x^2 \sqrt{9 - x^3} dx$$

$$10.4. \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$10.10. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 25}$$

$$10.5. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^3 x}}$$

$$10.11. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{x^4 + 12x^2 + 225}$$

$$10.6. \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$10.12. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^5 x}}$$

11-ТАПСЫРМА. Анықталған интегралды есептеңіз.

$$11.1. \int_2^3 x \ln(x-1) dx$$

$$11.4. \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

$$11.7. \int_0^{\pi/6} x \cos x dx$$

$$11.2. \int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$$

$$11.5. \int_1^3 x^2 \ln(x) dx$$

$$11.8. \int_1^2 \ln(3x+2) dx$$

$$11.3. \int_0^1 (x+3) \arctg x dx$$

$$11.6. \int_0^{\pi/2} (x+3) \sin x dx$$

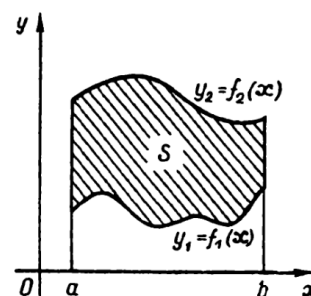
$$11.9. \int_{-3}^0 (x-2) e^{-\frac{x}{3}} dx$$

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ

Қисықсызықты трапеция ауданы. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасынан жоғарғы жағынан $y = f(x)$ функция графигімен, сол және оң жағынан сәйкес $x = a$ мен $x = b$ түзулерімен, төменгі жағынан Ox өсімен шектелген қисықсызықты трапецияның ауданы төменгі формуламен есептелетінін келтіргенбіз

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

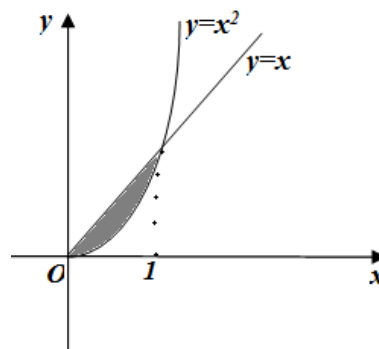
Айталық қисықсызықты фигура төменгі және жоғарғы жағынан сәйкес $y_1 = f_1(x)$ және $y_2 = f_2(x)$ функция графигтерімен, сол және оң жағынан сәйкес $x = a$ мен $x = b$ түзулерімен шектелген болсын, онда **жазық фигураның ауданы** мына формуламен есептеледі



$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (2)$$

МЫСАЛ. $y = x^2$ параболасы және $y = x$ түзуімен шектелген фигураның ауданын табыңыз. Сызбасын сызыңыз.

Шешуі. (2) формуланы қолданамыз, онда $y = x^2$, $y = x$ болғандықтан $x^2 - x = 0$ осыдан парабола мен түзудің қиылысу нүктелері $x = 0$; $x = 1$ тең:



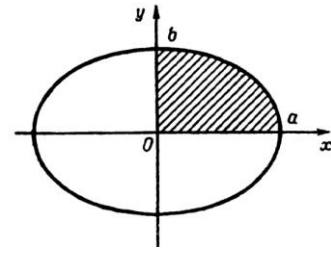
$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Қисықсызықты трапеция параметрлік теңдеулермен берілсін $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ және $\alpha \leq t \leq \beta$, $dx = \varphi'(t)dt$, онда

$$S = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (3)$$

МЫСАЛ. $x = a \cos t, y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

эллипсімен шектелген фигураның ауданын табайық.



Шешуі. Эллипс координаталық өстерге қарай симметриялы болғандықтан, эллипс ауданын бірінші ширектегі мәнін тауып, оны төрт еселеу жеткілікті.

$dx = -a \sin t dt$, онда (3) формула бойынша

$$S = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt =$$

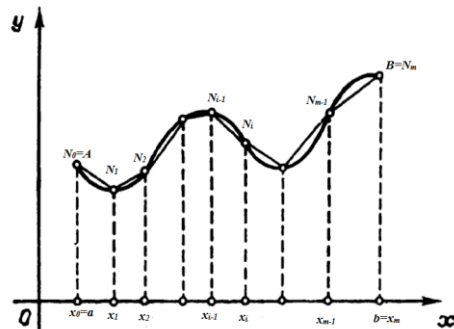
$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 4ab \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Егер $a = b = R$ болса, онда $S = \pi R^2$ - дөңгелектің ауданын аламыз.

ҚИСЫҚТЫҢ ҰЗЫНДЫҒЫ. Айталық жазық AB қисығы $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ кесіндісінде үзіліссіз функциямен берілсін. AB қисығын қалауымызша n бөлікке бөлеміз де A дан бастап нөмерлейміз

$$A = N_0 < N_1 < \dots < N_{i-1} < N_i < \dots < N_m = B$$

Бөлу нүктелерін хордалармен қосып AB қисығына іштей сызылған сынық сызықтарды аламыз. $N_{i-1}N_i$ сынық сызықтың ұзындығын l_i , оның периметрін P деп белгілейміз және $\lambda = \max_i l_i$ болсын.



Егер $L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P$ шектелген шек бар болса, оны AB қисығының ұзындығы деп, ал қисықты түзуленетін деп атайды.

ТЕОРЕМА. Егер $f(x)$ функциясы туындысы $f'(x)$ пен бірге $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда AB доғасының ұзындығы төмендегі формуламен анықталады

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (4)$$

МЫСАЛ. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ қисықтың $[-1;1]$ аралығындағы ұзындығын есептеңіз.

Шешуі. $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$$

(4) формула бойынша

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}.$$

12-ТАПСЫРМА. Берілген сызықтармен шектелген фигураның ауданын табыңыз.

12.1. $y = 4; y = x^2$.

12.2. $y = x^2 - 1; y = x + 3$.

12.3. $y = x^2 - 5; y = x - 3$.

12.4. $y = 4x - x^2; y = x$

12.5. $x = y^2; x = 1$.

12.6. $y = x^2 + x; y = x + 1$

12.7. $y = \sin x; y = 1; x = -\frac{\pi}{3}$.

12.8. $y = -2x^2 + 3x + 6; y = x + 2$